Ultraproductos y el Principio de Lefschetz

1. Introducción

Este curso tiene dos objetivos principales. En una primera instancia nos proponemos introducir la construcción de ultraproductos, que es una herramienta de la teoría de modelos de gran utilidad a la hora de probar propiedades de primer orden. Definiremos las nociones básicas en torno a esta construcción y veremos los resultados elementales en relación a ella para concluir en el teorema fundamental de ultraproductos, el teorema de Łoś. En una segunda instancia nos proponemos dar una prueba del Principio de Lefschetz utilizando estas herramientas. En teoría de modelos un **principio de transferencia** es aquel que establece que todos los enunciados de algún lenguaje que son verdaderos para alguna estructura son verdaderos para alguna otra estructura. Uno de los primeros ejemplos de un principio de transferencia fue el principio de Lefschetz, que es un principio heurístico de la geometría algebraica. En la sección 3 enunciaremos este principio en la teoría de modelos y daremos una prueba por medio de las herramientas que introduciremos a lo largo del curso.

Asumimos cierta familiaridad con las nociones básicas de la teoría de modelos, para un estudio detallado pueden consultarse el libro *Teoría de Modelos* de Chang y Keisler [1]. A continuación hacemos un breve repaso de la notación. El cardinal de un conjunto X es denotado por $|X|$. El cardinal de $\mathbb{N}$ es denotado por ω. El conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto I es denotado por $\mathcal{P}(I)$, y el conjunto de subconjuntos finitos de I por $\mathcal{P}_\omega(I)$. Un **lenguaje de primer orden** L consiste en un conjunto símbolos finitarios de relación, función y constantes. Usamos $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\ldots$ para denotar L-estructuras, o modelos en L, con universos A, B, $\ldots$, respectivamente. Por el cardinal de $\mathbf{A}$ entendemos el cardinal de su universo A. La notación $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ significa que la fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es verdadera en $\mathbf{A}$ cuando cada x_i es interpretada por la correspondiente a_i. La notación $h\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ significa que h es un homomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$, esto es, h mapea A en B y cada fórmula atómica que es verdadera para una tupla de $\mathbf{A}$ es verdadera para la imagen por h de esa tupla en $\mathbf{B}$. $h\colon \mathbf{A} \cong \mathbf{B}$ significa que h es un isomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$, y $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$ significa que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son isomorfos. El conjunto de todas las sentencias verdaderas en $\mathbf{A}$ es llamado la **teoría completa** de $\mathbf{A}$. Decimos que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son **elementalmente equivalentes**, en símbolos $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$, si tienen la misma teoría completa.

2. Ultrafiltros, ultraproductos y el teorema de Łoś

En esta sección trataremos con un método básico para la construcción de modelos, los ultraproductos. Este método se originó con Skolem en la década de 1930 y ha sido utilizado de forma extensa desde el trabajo de Łoś en 1955. Definiremos las nociones de ultrafiltro y ultraproducto y probaremos importantes resultados que establecen la conexión entre los ultraproductos y las propiedades de primer orden de los modelos. Al mismo tiempo y sin costo extra, introduciremos una construcción llamada producto reducido que es un caso más general de los ultraproductos y que tiene también aplicaciones muy importantes aunque no las veremos en este curso.

Definición 2.1 Sea I un conjunto no vacío. Un **filtro** $\mathcal{F}$ sobre I es un conjunto $F \subseteq \mathcal{P}(I)$ tal que:

(i) $I \in \mathcal{F}$.

(ii) Si $X \in \mathcal{F}$ y $X \subseteq Y \subseteq I$ entonces $Y \in \mathcal{F}$.

(iii) Si $X \in \mathcal{F}$ y $Y \in \mathcal{F}$ entonces $X \cap Y \in \mathcal{F}$.

Observemos que todo filtro $\mathcal{F}$ es un conjunto no vacío dado que $I \in \mathcal{F}$. Ejemplos de filtros son:

- El **filtro trivial** $\mathcal{F} = \{I\}$.
- El **filtro impropio** $\mathcal{F} = \mathcal{P}(I)$.
- Para cada $Y \subseteq I$, el filtro $[Y) = \{X \in \mathcal{P}(I) \colon Y \subseteq X\}$; este filtro es llamado el **filtro principal** generado por Y.
- Dado I un conjunto infinito, el **filtro de Fréchet** sobre I: $\mathcal{F} = \{X \in \mathcal{P}(I) \colon I \setminus X \text{ es finito}\}$.

Decimos que $\mathcal{F}$ es un **filtro propio** si y sólo si no es el filtro impropio $\mathcal{P}(I)$. La siguiente proposición muestra como podemos obtener un filtro a partir de un subconjunto arbitrario de $\mathcal{P}(I)$. Primero necesitamos la siguiente definición.

Definición 2.2 Sea $\mathcal{E}$ un subconjunto de $\mathcal{P}(I)$. Llamaremos el **filtro generado** por $\mathcal{E}$ a la intersección $\mathcal{F}$ de todos los filtros sobre I que incluyen a $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{F} = \bigcap \{\mathcal{D} \colon \mathcal{E} \subseteq \mathcal{D} \text{ y } \mathcal{D} \text{ es un filtro sobre } I\}.$$

Decimos que $\mathcal{E}$ tiene la **propiedad de intersección finita** si y sólo si la intersección de cualquier número de elementos de $\mathcal{E}$ es no vacía.

Proposición 2.1 *Sea $\mathcal{E}$ un subconjunto de $\mathcal{P}(I)$ y sea $\mathcal{F}$ el filtro generado por $\mathcal{E}$. Entonces:*

(i) *$\mathcal{F}$ es un filtro sobre I.*

(ii) *$\mathcal{F}$ es el conjunto de todos los $X \in \mathcal{P}(I)$ tales que o bien $X = I$ o para algunos $Y_1, \ldots, Y_n \in \mathcal{E}$,*

$$Y_1 \cap \cdots \cap Y_n \subseteq X.$$

(iii) *$\mathcal{F}$ es un filtro propio si y sólo si $\mathcal{E}$ tiene la propiedad de intersección finita.*

Demostración. La demostración se deja como ejercicio. Ayuda: para demostrar (ii) probar que

$$\{X \in \mathcal{P}(I) \colon X = I \text{ o existen } Y_1, \ldots, Y_n \in \mathcal{E} \text{ tales que } X \supseteq Y_1 \cap \ldots Y_n\}$$

es un filtro. $\dashv$

Pasamos ahora a el estudio de los ultrafiltros propiamente.

Definición 2.3 Un **ultrafiltro** sobre I es un filtro propio $\mathcal{U}$ sobre I tal que: Para cada $X \subseteq I$,

$$X \in \mathcal{U} \text{ si y sólo si } I \setminus X \notin \mathcal{U}.$$

Si simplemente decimos que $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro asumimos que $I = \bigcup \mathcal{F}$.

Ejercicio 2.1 *Sea $Y \subseteq I$. $[Y)$ es un ultrafiltro si y sólo si existe $y \in I$ tal que $Y = \{y\}$.*

Ejercicio 2.2 *Sea I un conjunto infinito y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre I. $\mathcal{U}$ es principal si y sólo si no contiene el filtro de Fréchet.*

Proposición 2.2 *Son equivalentes:*

(i) *$\mathcal{F}$ es un ultrafiltro sobre I.*

(ii) *$\mathcal{F}$ es un filtro propio maximal sobre I. Esto es, $\mathcal{F}$ es un filtro propio sobre I y el único filtro propio sobre I que incluye a $\mathcal{F}$ es $\mathcal{F}$.*

Demostración. (i)$\Rightarrow$(ii) Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro y sea $\mathcal{D}$ un filtro tal que $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{D}$. Sea $X \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{F}$. Si $X \notin \mathcal{F}$ entonces $I \setminus X \in \mathcal{F}$, lo que implica que $I \setminus X \in \mathcal{D}$. Dado que $X \in \mathcal{D}$ y $I \setminus X \in \mathcal{D}$, $\emptyset \in \mathcal{D}$ y $\mathcal{D} = \mathcal{P}(I)$. En consecuencia el único filtro propio que contiene a $\mathcal{F}$ es $\mathcal{F}$.

(ii)$\Rightarrow$(i). Sea $\mathcal{F}$ un filtro maximal, sea $X \in \mathcal{P}(I)$ y supongamos que $X \notin \mathcal{F}$. Queremos ver que $I \setminus X \in \mathcal{F}$. Sea $\mathcal{H}$ el filtro generado por $\mathcal{F} \cup \{I \setminus X\}$. Veamos que $\mathcal{H}$ tiene la propiedad de intersección finita. Basta tomar $Y \in \mathcal{F}$ y notar que $Y \cap I \setminus X \neq \emptyset$, ya que $Y \cap I \setminus X = \emptyset$ implica $Y \subseteq X$ que implicaría $X \in \mathcal{F}$. Ahora bien, si $\mathcal{H}$ tiene la propiedad de intersección finita, por la Proposición 2.1, sabemos que $\mathcal{H}$ es un filtro propio que contiene a $\mathcal{F}$, y dado que $\mathcal{F}$ es maximal tenemos $\mathcal{H} = \mathcal{F}$. En consecuencia $I \setminus X \in \mathcal{F}$. Esto prueba que $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro. $\dashv$

Probaremos ahora un teorema que nos garantiza la existencia de ultrafiltros.

Proposición 2.3 (Teorema del Ultrafiltro) *Si $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(I)$ y $\mathcal{E}$ tiene la propiedad de intersección finita, existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre I tal que $E \subseteq \mathcal{U}$.*

Demostración. Por la Proposición 2.1, el filtro $\mathcal{F}$ generado por $\mathcal{E}$ no contiene el conjunto vacío y en consecuencia es un filtro propio. Más aun, si C es cualquier cadena no vacía de filtros propios sobre I, entonces $\bigcup C$ es un filtro propio sobre I. Además, si cada $\mathcal{D} \in C$ incluye a $\mathcal{E}$ entonces $\bigcup C$ incluye a $\mathcal{E}$. Se sigue por el lema de Zorn que la clase $\mathcal{K}_{\mathcal{E}}$ de todos los filtros sobre I que incluyen a $\mathcal{E}$ tiene un elemento maximal, digamos $\mathcal{D}$. Así $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}$. $\mathcal{D}$ es un filtro propio maximal sobre I dado que si $\mathcal{D}'$ es un filtro propio que incluye a $\mathcal{D}$, entonces $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}'$, y entonces $\mathcal{D}'$ pertenece a $\mathcal{K}_{\mathcal{E}}$ y $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$. Así, por la Proposición 2.2, $\mathcal{D}$ es un ultrafiltro sobre I. $\dashv$

Corolario 2.4 (Tarski [4]) *Todo filtro propio sobre un conjunto I puede extenderse a un ultrafiltro sobre I.*

Estamos en condiciones ahora de introducir las construcciones de productos reducidos y ultraproductos. El último es meramente un caso especial del primero. Primero aplicamos esta construcción a conjuntos, y posteriormente a modelos. Supongamos que I es un conjunto no vacío, $\mathcal{F}$ es un filtro propio sobre I, y para cada $i \in I$, A_i es un conjunto no vacío. Sea

$$C = \prod_{i \in I} A_i$$

el producto cartesiano de estos conjuntos. Así C es el conjunto de todas las funciones f con dominio I tales que para cada $i \in I$, $f(i) \in A_i$. Dadas dos funciones $f, g \in C$ decimos que f y g son **$\mathcal{F}$-equivalentes**, en símbolos $f \equiv_{\mathcal{F}} g$, si y sólo si

$$\{i \colon f(i) = g(i)\} \in \mathcal{F}$$

Para continuar necesitamos lo siguiente:

Proposición 2.5 *La relación $\equiv_{\mathcal{F}}$ es una relación de equivalencia sobre $\prod_{i \in I} A_i$.*

Demostración. Ejercicio. $\dashv$

Llamaremos $f/_{\mathcal{F}}$ a la clase de equivalencia de f por $\equiv_{\mathcal{F}}$:

$$f/_{\mathcal{F}} = \{g \in C \colon f \equiv_{\mathcal{F}} g\}.$$

Definimos entonces el **producto reducido** de A_i módulo $\mathcal{F}$ como el conjunto de todas las clases de equivalencia de $\equiv_{\mathcal{F}}$. Lo denotamos por $\prod A_i/_{\mathcal{F}}$. Así

$$\prod A_i/_{\mathcal{F}} = \{f/_{\mathcal{F}} \colon f \in \prod_{i \in I} A_i\}.$$

Llamaremos a I el **conjunto de índices** para $\prod A_i/_{\mathcal{F}}$. En el caso especial en que $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro sobre I, el producto reducido $\prod A_i/_{\mathcal{F}}$ es llamado

ultraproducto. Cuando todos los conjuntos A_i son iguales, $A_i = A$, el producto reducido puede escribirse como $\prod A/_{\mathcal{F}}$, y lo llamamos **potencia reducida** de A módulo $\mathcal{F}$. En particular, si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro entonces llamamos a $\prod A/_{\mathcal{F}}$ **ultrapotencia** de A módulo $\mathcal{F}$.

Daremos ahora la definición de producto reducido de modelos. Sea I un conjunto no vacío, sea $\mathcal{F}$ un filtro propio sobre I, y para cada $i \in I$ sea $\mathbf{A}_i$ un modelo en L. Por convención llamaremos R_i a la interpretación de un símbolo de relación P en $\mathbf{A}_i$, G_i a la interpretación de un símbolo de función F en $\mathbf{A}_i$ y a_i a la interpretación de un símbolo de constante c en $\mathbf{A}_i$.

Definición 2.4 El **producto reducido** $\prod \mathbf{A}_i/_{\mathcal{F}}$ es el modelo en L descrito como sigue:

(i) El conjunto universo es $\prod A_i/_{\mathcal{F}}$.

(ii) Sea P un símbolo de relación n ario de L. La interpretación de P en $\prod \mathbf{A}_i/_{\mathcal{F}}$ es la relación S tal que

$$S(f^1/_{\mathcal{F}}, \ldots, f^n/_{\mathcal{F}}) \text{ si y sólo si } \{i \colon R_i(f^1(i), \ldots, f^n(i))\} \in \mathcal{F}.$$

(iii) Sea F un símbolo de función n ario de L. Entonces la interpretación de F en $\prod \mathbf{A}_i/_{\mathcal{F}}$ es la función H dada por

$$H(f^1/_{\mathcal{F}}, \ldots, f^n/_{\mathcal{F}}) = \langle G_i(f^1, \ldots, f^n) \colon i \in I\rangle/_{\mathcal{F}}.$$

(iv) Sea c una constante de L. Entonces la interpretación de c en $\prod \mathbf{A}_i/_{\mathcal{F}}$ es el elemento $b \in \prod A_i/_{\mathcal{F}}$ donde

$$b = \langle a_i \colon i \in I\rangle/_{\mathcal{F}}.$$

Para mostrar que la definición anterior es consistente debemos chequear que $S(f^1/_{\mathcal{F}}, \ldots, f^n/_{\mathcal{F}})$ y $H(f^1/_{\mathcal{F}}, \ldots, f^n/_{\mathcal{F}})$ no dependen de la elección de los representantes de $f^1, \ldots, f^n$ de las clases de equivalencia. Establecemos esto como proposición.

Proposición 2.6 *Sea I un conjunto no vacío y sea $\mathcal{F}$ un filtro propio sobre I. Supongamos que $f^1 \equiv_{\mathcal{F}} g^1$,$\ldots$,$f^n \equiv_{\mathcal{F}} g^n$. Entonces*

$$\{i \in I \colon R_i(f^1(i), \ldots, f^n(i))\} \in \mathcal{F} \textit{si y sólo si } \{i \in I \colon R_i(g^1(i), \ldots, g^n(i))\} \in \mathcal{F},$$

y

$$\langle G_i(f^1(i), \ldots, f^n(i)) \colon i \in I\rangle \equiv_{\mathcal{F}} \langle G_i(g^1(i), \ldots, g^n(i)) \colon i \in I\rangle.$$

Demostración. Ejercicio. $\dashv$

El resultado que sigue es el "teorema fundamental" de ultraproductos. Vale sólo para ultraproductos y no para productos reducidos arbitrarios.

Teorema 2.7 (Teorema de Łoś) *Sea* $\mathbf{B}$ *el ultraproducto* $\prod \mathbf{A}_i/_{\mathcal{U}}$ *y sea* I *el conjunto de índices. Entonces:*

(i) *Para cada término* $t(x_1, \ldots, x_n)$ *de* L *y elementos* $f^1/_{\mathcal{U}}, \ldots, f^n/_{\mathcal{U}} \in B$ *tenemos que*

$$t_{\mathbf{B}}[f^1/_{\mathcal{U}}, \ldots, f^n/_{\mathcal{U}}] = \langle t_{\mathbf{A}_i}[f^1(i), \ldots, f^n(i)] \colon i \in I \rangle/_{\mathcal{U}}.$$

(ii) *Dada una fórmula* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *de* L *y* $f^1/_{\mathcal{U}}, \ldots, f^n/_{\mathcal{U}} \in B$ *tenemos que*

$$\mathbf{B} \models \varphi[f^1/_{\mathcal{U}}, \ldots, f^n/_{\mathcal{U}}] \text{ si y sólo si } \{i \colon \mathbf{A}_i \models \varphi[f^1(i), \ldots, f^n(i)]\} \in \mathcal{U}.$$

(iii) *Para cualquier sentencia* φ *de* L*,*

$$\mathbf{B} \models \varphi \text{ si y sólo si } \{i \colon \mathbf{A}_i \models \varphi\} \in \mathcal{U}.$$

Demostración. (iii) es consecuencia inmediata de (i) y (ii). Las pruebas de (i) y (ii) son por inducción en términos y fórmulas respectivamente.

(i). Por la definición de producto reducido vemos que cuando $t(x_1, \ldots, x_n)$ es un término de la forma $F(x_1, \ldots, x_n)$ y cuando t es un símbolo de constante o una variable, se satisface (i). Supongamos ahora que

$$t(x_1, \ldots, x_n) = F(t_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, t_m(x_1, \ldots, x_n))$$

donde F es un símbolo de función de L y $t_1, \ldots, t_m$ son términos que satisfacen (i). Entonces por la definición de interpretación de los términos,

$$t_{\mathbf{B}}[f^1/_{\mathcal{U}}, \ldots, f^n/_{\mathcal{U}}] = H(t_{1\mathbf{B}}[f^1/_{\mathcal{U}}, \ldots, f^n/_{\mathcal{U}}], \ldots, t_{m\mathbf{B}}[f^1/_{\mathcal{U}}, \ldots, f^n/_{\mathcal{U}}]$$

donde H es la interpretación de F en L. Por hipótesis inductiva sabemos que para $t_1, \ldots, t_m$ satisfacen (i) y así, para $k = 1, \ldots, m$ tenemos

$$t_{k\mathbf{B}}[f^1/_{\mathcal{U}}, \ldots, f^n/_{\mathcal{U}}] = g^k/_{\mathcal{U}}$$

donde

$$g^k/_{\mathcal{U}} = \langle t_{k\mathbf{A}_i}[f^1(i), \ldots, f^n(i)] \colon i \in I \rangle/_{\mathcal{U}}.$$

Por la definición de ultraproducto tenemos

$$H(g^1/_{\mathcal{U}}, \ldots, g^m/_{\mathcal{U}}) = \langle G_i(g^1(i), \ldots, g^m(i)) \colon i \in I \rangle/_{\mathcal{U}}.$$

Nuevamente, aplicando la definición de interpretación de los términos tenemos que

$$t_{\mathbf{A}_i}[f^1(i), \ldots, f^n(i)] = G_i(g^1(i), \ldots, g^m(i)).$$

Combinando estos igualdades obtenemos que

$$t_{\mathbf{B}}[f^1/_{\mathcal{U}}, \ldots, f^n/_{\mathcal{U}}] = H(g^1/_{\mathcal{U}}, \ldots, g^m/_{\mathcal{U}}) = \langle t_{\mathbf{A}_i}[f^1(i), \ldots, f^n(i)] \colon i \in I \rangle/_{\mathcal{U}}.$$

Por lo que $t(x_1, \ldots, x_n)$ satisface (i).

(ii). La prueba de que (ii) vale para las fórmulas atómicas es similar a la prueba de (i) dada anteriormente y dejamos los detalles como ejercicio.

Supongamos que $\varphi = \neg\psi(x_1, \ldots, x_n)$ y (ii) vale para ψ. Entonces son equivalentes:

$$\mathbf{B} \models \varphi[f^1/\mathcal{U}, \ldots, f^n/\mathcal{U}];$$
$$\mathbf{B} \not\models \psi[f^1/\mathcal{U}, \ldots, f^n/\mathcal{U}];$$
$$\{i \in I \colon \mathbf{A}_i \models \psi[f^1(i), \ldots, f^n(i)]\} \notin \mathcal{U};$$
$$\{i \in I \colon \mathbf{A}_i \not\models \psi[f^1(i), \ldots, f^n(i)]\} \in \mathcal{U};$$
$$\{i \in I \colon \mathbf{A}_i \models \varphi[f^1(i), \ldots, f^n(i)]\} \in \mathcal{U}.$$

El hecho de que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro es necesario para probar que la tercer y cuarta línea anteriores son equivalentes. De hecho, este es el único punto en toda la demostración donde necesitamos que $\mathcal{U}$ sea un ultrafiltro y no meramente un filtro.

El siguiente paso es probar que si ψ y θ satisfacen (ii) entonces $\psi \wedge \theta$ también. Esto se deja como ejercicio.

Para la última parte de nuestra inducción, supongamos

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = (\exists x_0)\psi(x_0, x_1, \ldots, x_n),$$

y que (ii) vale para ψ. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

$$\mathbf{B} \models \varphi[f^1/\mathcal{U}, \ldots, f^n/\mathcal{U}];$$
$$\text{existe } f^0/\mathcal{U} \in B \text{ tal que } \mathbf{B} \models \psi[f^0/\mathcal{U}, f^1/\mathcal{U}, \ldots, f^n/\mathcal{U}];$$
$$\text{existe } f^0/\mathcal{U} \in B \text{ tal que } \{i \in I \colon \mathbf{A}_i \models \psi[f^0(i), f^1(i), \ldots, f^n(i)]\} \in \mathcal{U}. \tag{1}$$

Dado que $\mathbf{A}_i \models \psi[f^0(i), f^1(i), \ldots, f^n(i)]$ implica $\mathbf{A}_i \models \varphi[f^1(i), \ldots, f^n(i)]$ tenemos que

$$\{i \colon \mathbf{A}_i \models \psi[f^0(i), f^1(i), \ldots, f^n(i)]\} \subseteq \{i \colon \mathbf{A}_i \models \varphi[f^1(i), \ldots, f^n(i)]\}$$

y así la afirmación en (1) implica

$$\{i \in I \colon \mathbf{A}_i \models \varphi[f^1(i), \ldots, f^n(i)]\} \in \mathcal{U}. \tag{2}$$

Recíprocamente, si (2) vale entonces podemos escoger $f^0 \in \prod_{i \in I} A_i$ de manera que (1) valga. En consecuencia (1) y (2) son equivalentes. Esto muestra que φ satisface (ii). Nuestra prueba está completa. $\dashv$

Corolario 2.8 *Sea $\prod \mathbf{A}/_{\mathcal{U}}$ una ultrapotencia de $\mathbf{A}$. Entonces $\prod \mathbf{A}/_{\mathcal{U}} \equiv \mathbf{A}$.*

Una clase $\mathcal{K}$ de modelos de L se dice **clase elemental** si y sólo si existe una teoría T en L tal que $\mathcal{K}$ es exactamente la clase de todos los modelos de T. $\mathcal{K}$ se dice **cerrada por ultraproductos** si y sólo si todo ultraproducto $\prod \mathbf{A}_i/_{\mathcal{U}}$ de una familia de modelos en $\mathcal{K}$ pertenece a $\mathcal{K}$.

Corolario 2.9 *Si $\mathcal{K}$ es una clase elemental entonces es cerrado por ultraproductos.*

Los siguientes dos resultados, que enunciaremos sin prueba, son una muestra de la potencia de los ultraproductos.

Corolario 2.10 (El teorema de compacidad vía ultraproductos) *Sea Σ un conjunto de sentencias de L, sea $I = \mathcal{P}_\omega(\Sigma)$ el conjunto de todos los subconjuntos finitos de Σ y para cada $i \in I$ sea $\mathbf{A}_i$ un modelo de i. Entonces existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre I tal que $\prod \mathbf{A}_i/_{\mathcal{U}}$ es un modelo de Σ.*

Teorema 2.11 *Sea $\mathcal{K}$ una clase arbitraria de modelos. $\mathcal{K}$ es una clase elemental si y sólo si es cerrada bajo ultraproductos y equivalencia elemental.*

3. El principio de Lefschetz

Como indicamos en la introducción, el principio de Lefschetz es un principio heurístico de la geometría algebraica. Probablemente por esta razón, en la literatura no se denomina a una única proposición o enunciado con este nombre. Enunciaremos y probaremos aquí dos resultados que son dos formulaciones distintas del principio de Lefschetz. Primero enunciaremos sin prueba algunos resultados clásicos que necesitaremos y que escapan al alcance de este curso.

Definición 3.1 Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ es **completo numerable** si $\mathcal{U}$ es cerrado por intersecciones numerables. $\mathcal{U}$ es **incompleto numerable** si $\mathcal{U}$ tiene un subconjunto numerable V tal que $\bigcap V = \emptyset$.

Es un ejercicio fácil mostrar que un ultrafiltro $\mathcal{U}$ es incompleto numerable si y sólo si no es completo numerable. Todo ultrafiltro principal es completo numerable. Cualquier ultrafiltro, sobre I numerable, que contenga el filtro de Fréchet es incompleto numerable.

Teorema 3.1 (Frayne, Morel y Scott[2]) *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro incompleto numerable y supongamos que, para cada $n \in \omega$, $\{i \in I \colon |A_i| = n\} \notin \mathcal{U}$. Entonces $|\prod A_i/_{\mathcal{U}}| \geq 2^\omega$.*

Denotaremos con $\mathbb{F}_p^{alg}$ a la clausura algebraica del cuerpo de p elementos $\mathbb{F}_p$.

Corolario 3.2 *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no principal. Entonces $|\prod \mathbb{F}_p^{alg}/_{\mathcal{U}}| = 2^\omega$.*

Teorema 3.3 (Teorema de Steinitz) *Si K y L son dos cuerpos algebraicamente cerrados de la misma característica y el mismo cardinal no-numerable, entonces son isomorfos.*

El lema a continuación es denominado por algunos autores como el principio de Lefschetz.

Lema 3.4 *Sea $\mathcal{U}$ un filtro no principal. Entonces*

$$\prod \mathbb{F}_p^{alg}/_{\mathcal{U}} \cong \mathbb{C}.$$

Demostración. Sea $\mathcal{K}$ la clase de los cuerpos algebraicamente cerrados. Dado que $\mathcal{K}$ es una clase elemental y $\mathbb{F}_p^{alg} \in \mathcal{K}$ para cada p primo, por Corolario 2.9 tenemos que $\prod \mathbb{F}_p^{alg}/_{\mathcal{U}} \in \mathcal{K}$. En consecuencia $\prod \mathbb{F}_p^{alg}/_{\mathcal{U}}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado.

Queremos ver ahora que que $\prod \mathbb{F}_p^{alg}/_{\mathcal{U}}$ tiene característica 0. Para cada $n \in \omega$ sea

$$\varphi_n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ veces}} = 0.$$

Claramente, para cada n, tenemos que

$$\{p : \mathbb{F}_p^{alg} \models \varphi_n\} \text{ es finito}$$

lo que implica que

$$\{p : \mathbb{F}_p^{alg} \models \neg\varphi_n\} \in \mathcal{U}.$$

En consecuencia, por el teorema de Łoś

$$\prod \mathbb{F}_p^{alg}/_{\mathcal{U}} \models \neg\varphi_n$$

para cada n. Así $\prod \mathbb{F}_p^{alg}/_{\mathcal{U}}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0.

En vista del Corolario 3.2 tenemos que $\prod \mathbb{F}_p^{alg}/_{\mathcal{U}}$ y $\mathbb{C}$ son dos cuerpos algebraicamente cerrados de la misma característica y el mismo cardinal. Así, aplicando el Teorema de Steinitz, tenemos que $\prod \mathbb{F}_p^{alg}/_{\mathcal{U}}$ y $\mathbb{C}$ son isomorfos, lo que concluye la demostración. $\dashv$

Teorema 3.5 (Test de Łoś-Vaught) *Si una Teoría T es satisfacible, no tiene modelos finitos y es κ-categórica (hay un único modelo de T de cardinal κ, salvo isomorfismos) para algún $\kappa \geq |L|$, entonces T es una teoría completa.*

Corolario 3.6 *La teoría de los cuerpos algebraicamente cerrados de característica p (con p primo o 0) es una teoría completa.*

El siguiente Teorema es otra formulación del principio de Lefschetz y es la que nombraremos como tal. Sin embargo, debemos notar que el Lema 3.4 no se deduce del Teorema 3.7, ya que el primero plantea un isomorfismo y del segundo sólo se infiere la equivalencia elemental.

Teorema 3.7 (Principio de Lefschetz) *Dada φ una sentencia de primer orden en el lenguaje de los anillos. Son equivalentes:*

(i) *φ vale en $\mathbb{C}$.*

(ii) *φ vale en cualquier cuerpo algebraicamente cerrado de característica* 0.

(iii) *Para todo primo p arbitrariamente grande, φ vale en un cuerpo algebraicamente cerrado de característica p.*

Demostración. (ii) implica (i) es trivial. (i) implica (ii) es consecuencia directa del Corolario 3.6 tomando $p = 0$. Por el Coroloario 3.6 nuevamente, sabemos que para cada p primo hay un único cuerpo algebraicamente cerrado de característica p, salvo isomorfismos; así (i) equivalente a (iii) es consecuencia directa del Lema 3.4. $\dashv$

Referencias

[1] C.C. Chang y H.J. Keisler, *Model Theory*, Volume 73, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Elsevier, 3rd Edition (1990).

[2] T.E. Frayne, A.C. Morel y D.S. Scott, *Reduced direct products*, Fund. Math. **51** (1962), 195–228 (Abstract: Notice Amer. Math. Soc. **5** (1958), p. 674).

[3] B. Pospíšil, *Remark on bicomact spaces*, Ann. Math. **38** (1937), 845–846.

[4] A. Tarski, *Une contribution à la théorie de la mesure*, Fund. Math. **15** (1930), 42–45.