Análisis de Fourier en grupos abelianos finitos

elENA IX - Agosto de 2019

Nicolás Sirolli

Ejercicios

A menos que se indique lo contrario, G será un grupo abeliano finito.

Clase 1

1. Sea $G = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^r$. Dados $x, y \in G$, denotemos $x \cdot y = \sum_{i=1}^r x_i y_i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.
   Probar que
   $$\widehat{G} = \left\{ x \mapsto e^{2\pi i x \cdot y/N} \ : \ y \in G \right\}.$$

2. *a*) Sea H un subgrupo de G. Sea $f \in L(G)$ una función H-periódica. Probar que $\operatorname{sop} \widehat{f} \subseteq H^\sharp$.
   b) Sea d un divisor de N y sea $f : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ una función d-periódica. Identificando $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ con su dual, probar que $\widehat{f}$ está soportada en los múltiplos de N/d.
   c) Sea $f : \mathbb{Z}/45\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ la función que toma, comenzando por 1 y repitiendo sucesivamente, los valores $1, 8, 9, 17$. Graficar $|\widehat{f}(x)|$, y comparar con lo obtenido en el ítem anterior.

3. Sea H un subgrupo de G. Consideremos la función $\delta_H \in L(G)$ dada por
   $$\delta_H(x) = \begin{cases} 1, & x \in H, \\ 0, & x \notin H. \end{cases}$$
   Probar que $\widehat{\delta_H} = |H| \, \delta_{H^\sharp}$.
   Concluir que δ_H es una función para la cual vale la igualdad en el principio de incertidumbre de Heisenberg.

4. Dado un grupo abeliano localmente compacto G, su *dual* es el grupo abeliano (localmente compacto)

$$\widehat{G} = \left\{ \chi \in \mathrm{Hom}(G, S^1) \,:\, \chi \text{ continuo} \right\}.$$

   a) Probar que
   $$\widehat{\mathbb{R}} = \left\{ x \mapsto e^{2\pi i x y} \,:\, y \in \mathbb{R} \right\},$$
   y por lo tanto $\widehat{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}$.

   b) Probar que
   $$\widehat{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} = \left\{ x \mapsto e^{2\pi i x y} \,:\, y \in \mathbb{Z} \right\},$$
   y por lo tanto $\widehat{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}$.

   ¿Que significa esto en términos de transformadas y series de Fourier de funciones reales?

Clase 2

5. Sean $z, w \in \mathbb{C}^N$. Probar que

$$\left| \sum_{n,m=1}^{N} z_n w_m e^{-2\pi i n m / N} \right| \leq \sqrt{N} \left(\sum_{n=1}^{N} |z_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{m=1}^{N} |w_m|^2 \right)^{1/2}.$$

6. Consideremos la familia de operadores $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{End}(L(G))$ dada por

$$\mathcal{F} = \{ T_x \,:\, x \in G \}.$$

   a) Probar que $L(G)$ admite una base de autovectores simultáneos de todo operador de $\mathcal{F}$.

   b) Probar que si $f \in L(G)$ es un autovector de todo operador de $\mathcal{F}$ tal que $f(0) = 1$, entonces $f \in \widehat{G}$.

   c) Concluir que $|G| = |\widehat{G}|$ (sin usar el teorema de estructuras para grupos abelianos finitos).

7. Una matriz $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ se dice *circulante* si es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{N-1} \\ a_{N-1} & a_0 & \cdots & a_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{pmatrix},$$

   es decir, si existe $f \in L(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ tal que $a_{ij} = f(j - i)$ para todos $1 \leq i, j \leq N$.

   Probar que el conjunto de matrices circulantes es un subanillo de $\mathbb{C}^{N \times N}$, isomorfo a $L(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$.

8. Sea A una matriz circulante.

   a) Probar que si A está dada por una función f como arriba, entonces tiene por autovalores a los coeficientes de Fourier de f.

   b) Probar que para cada $0 \leq k < N$ el vector
   $$v_k = \left(1, e^{2\pi i k/N}, \ldots, e^{2\pi i (N-1)k/N}\right)$$
   es un autovector de A.

   c) Concluir que A es diagonalizable.

9. Sea B un subconjunto de $\widehat{G}$. Consideremos el operador *limitador de bandas* R_B en $L(G)$ dado por
   $$R_B(f)(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in B} \widehat{f}(x)\chi(x).$$
   Probar que $\|R_B\| = 1$.

10. Sea H un subgrupo de G. Consideremos los operadores P_H, C_H en $L(G)$ dados por
    $$P_H(f)(x) = \frac{1}{|H|} \sum_{y \in H} f(x+y), \qquad C_H(f)(x) = \begin{cases} f(x), & x \in H, \\ 0, & x \notin H. \end{cases}$$

    a) Probar que $\widehat{P_H(f)} = C_{H^\sharp}(\widehat{f})$ para toda $f \in L(G)$.

    b) Utilizando esto, redemostrar la fórmula de sumación de Poisson.

Clase 3

11. Sea p un primo impar. Identificamos $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ con su dual.
    Para cada $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, consideramos la *suma de Gauss*
    $$G_p(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} e^{2\pi i y^2 x/p}.$$

    a) Probar que si $p \nmid x$ entonces $G_p(x) = \widehat{f_p}(-x)$, siendo $f_p(y) = \left(\frac{y}{p}\right)$.

    b) Probar que $G_p(1)$ es la traza de la transformada de Fourier, como operador en $L(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

12. Sea $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, y sea $f \in L(G)$ dada por
    $$f(x_1, x_2) = e^{2\pi i \left(x_1^2 + x_2^2\right)/p}.$$
    Sea $H = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \{0\}$. Usando la fórmula de sumación de Poisson sobre f y H, demostrar que
    $$G_p(1)^2 = \left(\frac{-1}{p}\right) p.$$