

TEORÍA DE CATEGORÍAS.

CASE 1.

$$\bullet T: V \rightarrow W \text{ T.L.} \Rightarrow \dim T \approx V/NUT$$

$$(\equiv \dim V = \dim \dim T + \dim NUT)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x} \mapsto T(x) \text{ sobre } \checkmark \\ T(x) = T(y) \Rightarrow x - y \in NUT \Rightarrow \bar{x} = \bar{y} \text{ modulo } NUT \end{array} \right.$$

$$\bullet f: G \rightarrow H \text{ grupos} \Rightarrow \dim f \leq H, NUT f \trianglelefteq G$$

$$\text{y } \dim f \approx G/NUT f$$

$$\bullet f: A \rightarrow B \text{ Anillos} \Rightarrow A/NUT f \approx \dim f \leq B$$

$$\bullet f: M \rightarrow N \text{ R-modulos} \Rightarrow \dots$$

Es una afirmación sobre objetos x, y con cierta estructura y funciones/funciones que preservan esa estructura.

DEF: UNA CATEGORÍA C CONSISTE DE

- UNA COLECCIÓN DE OBJETOS $Ob C$

- PARA CADA $x, y \in Ob C$, UNA COLECCIÓN DE FUNCIONES O MORFISMOS $Hom(x, y)$, TALES QUE

$$\bullet \text{ Si } f \in Hom(x, y) \wedge g \in Hom(y, z) \\ \Rightarrow \exists g \circ f \in Hom(x, z)$$

$$\bullet \forall x \in \exists \text{ una función } 1_x \in Hom(x, x)$$

que cumplen las axiomas de

• Asociatividad: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

• unitarias: $f \circ 1_X = f = 1_Y \circ f$, $f \in \text{Hom}(X, Y)$

Ejemplos.

1. Set: Obj: conjuntos $\text{Hom}(A, B) = \text{funciones } A \rightarrow B$

2. Grp, Rg, Vect, Top, Ab, R-mod

3. Top: Obj: esp. topológicos, $\text{Hom} = \text{F. CONT.}$

4. $\underline{G}$: Obj $\underline{G}$: $g * h$ $\text{Hom}(*, *) = \subseteq$ $g \circ h = gh$

(5) TL' : Obj $TL' = \mathbb{N}$ $\text{Hom}(m, n)$: "matrices" $m \times n$ con entes en puros de $\mathbb{Z}$ y m puros de $\mathbb{Z}$ "homot."

TL : $\text{Hom} = \mathbb{Z} \text{ Hom}$, TL_{CP3} : $0 = p$

6. Chp : conjuntos de R : $\leftarrow A_0 \xrightarrow{d} A_1 \xrightarrow{d} A_2 \xrightarrow{d} \dots$
 $\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$
 $B_0 \in B_1 \dots$ $d^2 = 0$

K_R , D_R

7. Grafo $\Phi \rightarrow C\Phi$

Def. C cat, $A, B \in \text{Obj } C$, $f \in \text{Hom}(A, B)$ es un isomorf. si $\exists g \in \text{Hom}(B, A)$ / $gf = 1_A$, $fg = 1_B$

Nota: $f: A \rightarrow B$ si $\forall h_1, h_2 \in \text{Hom}(B, C)$ $fh_1 = fh_2 \Rightarrow h_1 = h_2$ "f es mono"

Def: cat C es un C : Obj $C = \text{Obj } C$ $h_1 = h_2$

$$\text{Hom}_{C^{\text{op}}}(A, B) = \text{Hom}(B, A)$$

"en matemática usamos flechas"

27
CASE 2

Functors

DEF: A 3 cat. un functor $F: A \rightarrow B \in$

• una función $ob A \rightarrow ob B \quad x \mapsto F(x)$

• una para cada $x, y \in ob A$, una función

$$Hom_A(x, y) \rightarrow Hom_B(Fx, Fy)$$

$$f \mapsto F(f)$$

tal que $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ y $F(1_A) = 1_{F(A)}$

ej 1 (functors de olvidos)

• $U: Grp \rightarrow Set$

$G \mapsto$ "conjunto G "

$f \mapsto$ "función f "

• $U: Rg \rightarrow Set$
 $\searrow$
 Ab

Inducción: $Ab \rightarrow Grp \quad \Gamma \mapsto \Gamma$ (cada gr es abelian)

ej 2 (functors libres)

$L: Set \rightarrow Grp$

$S \mapsto$ grupo libre en S

"parámetros $s_1, s_2, \dots, s_n$ "

con la LNC

$L: Set \rightarrow Vect$

$S \mapsto$ EBL en con base S

ej 2': $Grp \rightarrow Ab \xrightarrow{\gamma} \gamma G = \langle x y x^{-1} y^{-1} \rangle \mid \lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_n s_n = 0$
 $\searrow$
 $Gr \rightarrow G/\gamma G$

Ej 3 a) $\underline{A} \xrightarrow{\text{sur}} \underline{H} \quad F(\varphi) = \varphi$

$$F(g \circ h) = F(g) \circ F(h) = f(g)f(h)$$

$$F(gh)$$

$\therefore$ Functor = morf. de grupos.

b) $\underline{G} \rightarrow \text{set} \quad * \rightarrow S \quad F(g): S \rightarrow S$

$\text{si } F(g)(s) = g \cdot s \Rightarrow \text{Functor} = \text{Acción}$

c) $\underline{A} \rightarrow \text{Vect} \Rightarrow \text{Functor} = \text{Representación}$

$A \rightarrow B$

Def: Un functor se dice covariante si el m.
 functor de $A^{\text{op}} \rightarrow B$, el cual $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$

Functor = Functor covariante.

ej: 1. $\text{Top} \rightarrow \text{Rg} \quad X \rightarrow C(X) = \{f: X \rightarrow \mathbb{R}\}$

$\text{si } f: X \rightarrow Y \Rightarrow F(f): C(Y) \rightarrow C(X)$

$F(f)(g) = g \circ f.$

$\Rightarrow F(f \circ f')(g) = g \circ f \circ f' = F(f') \circ F(f)(g)$

2. $W \in V. \rightarrow F: \text{Vect} \rightarrow \text{Vect} \text{ contrav}$
 $V \mapsto \text{Hom}(V, W)$

si $W = \mathbb{K} \quad V \rightarrow V^*$

3. FN GRUPO: $C \xrightarrow{\text{sur}} \text{set} \quad C \xrightarrow{\text{REP.}} \text{REP.}$
 $X \xrightarrow{\text{sur}} \text{Hom}(X, Y) \quad \text{FUNCT. COV.}$
 $\text{Hom}(Y, X) \quad \text{FUNCT. COV.}$

DEF: $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ es

FIEL si $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, FY)$ INJ

PUENO si surj

DEF: SUBCAT $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ si $\text{Obj } \mathcal{C} \subset \text{Obj } \mathcal{D}$ y

$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \subset \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y)$ cerrado por comp.

El PUENO si $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y)$

$\hookrightarrow \mathcal{C} \subset \text{Grp.}$

TRANSF NATURAL: "MAPAS E/ FUNCTORES"

DEF: Sean $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ functors. Una TRANSF

NATURAL $\alpha: F \rightarrow G$ ES una familia $(\alpha_X)_{X \in \mathcal{C}}$

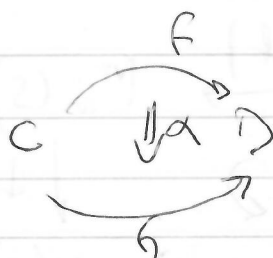
DE morfismos en $\mathcal{D}$ $\alpha_X: FX \rightarrow GX$ tales que

EL SIG. DIAGR. CONMUTA:

$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{Ff} & FY \\ \alpha_X \downarrow & & \downarrow \alpha_Y \\ GX & \xrightarrow{Gf} & GY \end{array}$$

$\forall f: X \rightarrow Y$ en $\mathcal{C}$.

ESCRIBAMOS



ej: $S \xrightarrow{F} \text{set}$ $F = \text{set}$ como S con una
 $\xrightarrow{F'}$ $F' = \text{conjunto } S' \dots$

$$\alpha = \alpha_* : \underset{S}{F(*)} \rightarrow \underset{S'}{F'(*)}$$

$$\text{si } g: * \rightarrow * \rightarrow F(g): S \rightarrow S \quad s \rightarrow g \cdot s$$

$$F'(g): S' \rightarrow S' \quad s' \rightarrow g \cdot s'$$

$$\alpha_* (Fg) = F'(g) \alpha_* (s) : F(g) \rightarrow F'(g)$$

$$\alpha_* (Fg)(s) = F'(g) \alpha_* (s)$$

$$\alpha_* (Fg)(s) = \alpha_* (g \cdot s)$$

$$F'(g) \alpha_* (s) = g \cdot \alpha_* (s)$$

$\Rightarrow \alpha_*$ es un
h-
inv.

ej. $\text{CAlg} \xrightarrow{M_n} \text{Mon}$

$$\mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$$

$$\mathbb{R} \rightarrow U(\mathbb{R}) \text{ monoides con 1 mult}$$

$$\xrightarrow{U} \text{owino}$$

para cada $\mathbb{R}$, $\det_{\mathbb{R}}: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow U(\mathbb{R})$ en p.e

$$\det_{\mathbb{R}}(xy) = \det_{\mathbb{R}}(x) \det_{\mathbb{R}}(y)$$

$$\det_{\mathbb{R}} \in \text{Mon } \forall \mathbb{R}$$

ej) una transf NAT.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S} \text{ morf de anillos}$$

$$M_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{M_n(f)} M_n(\mathbb{S})$$

$$\det_{\mathbb{R}} \downarrow$$

$$\curvearrowright$$

$$\downarrow \det_{\mathbb{S}}$$

$$U(\mathbb{R})$$

$$\xrightarrow{f}$$

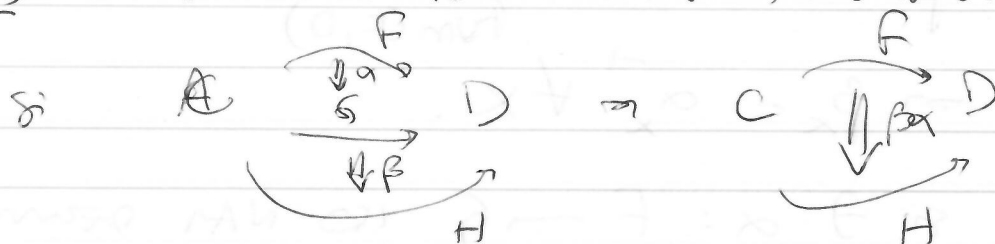
$$U(\mathbb{S})$$

2 porque $f \in$
de anillos y
 $\det = \sum \text{prod}$

$$f$$

4/7

obj: podemos componer transf. NATURALES:



para $(\beta \circ \alpha)_x = \beta_x \circ \alpha_x, \forall x \in C.$

también tenemos la transf. NATURALIDAD $\begin{matrix} F \\ \Downarrow \alpha \\ F \end{matrix}$

$\Rightarrow$ CATEGORÍA DE FUNDORES: $\text{Fun}(C, D)$

obj: FUNDORES DE C A D

$\text{FI} = \text{TRANSF. NAT.}$

ISOM. NAT: UN ISO NAT E/ DOS FUNT $f \xrightarrow{\alpha} g$

$\in \text{W ISO EN } \text{Fun}(C, D), \text{ etc}$

LEMA: $C \begin{matrix} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{H} \end{matrix} D$ UNA T.L. $\in \text{W ISO NAT}$ si y solo si $\alpha_x: F(x) \rightarrow H(x) \in \text{ISO} \forall x \in C.$

$\Rightarrow$ si $\alpha_x: F(x) \rightarrow H(x)$ ISO SEA $\beta_x = \alpha_x$

$\beta_x \in \text{UNA T.L. DE } H \text{ A } F$ $X \xrightarrow{f} Y$ $Hx \xrightarrow{gf} Hy$
 $\beta_x \downarrow$ $\beta_y \downarrow$

$\beta_y \circ gf = \beta_y \circ gf \circ \alpha_x \beta_x = \beta_y \circ \alpha_x \beta_x \circ gf = \beta_y \circ \alpha_x \beta_x \circ gf$

$\Rightarrow$ si $\alpha \sim \beta$ ~~si~~ α iso en $\text{Hom}_{\text{Func}(C,D)}(F, G)$
 $\rightarrow \exists \beta = \alpha^{-1} \in \text{Hom}_{\text{Func}(C,D)}(G, F)$
 $\Rightarrow \beta_x = \alpha_x^{-1} \forall x$.

DEF: si $\exists \alpha: F \rightarrow G$ iso NATL de C a D
 pUE F y G son NATURAL// iso., o

pUE $F(x) \simeq G(x)$ NATURAL en X

ES decir, se puede elegir iso $\alpha_x: Fx \rightarrow Gx$

pUE es NATURAL

EJ $C = \text{Vect}(\text{FD-V.E.S.})$.

$$f, g: C \rightarrow C \quad f = 2d$$

$$g = ()^{**}$$

para V , $\exists \alpha_V: V \rightarrow V^{**}$
 $x \mapsto E_x: E_x(f) = f(x)$
 $V^x \rightarrow \mathbb{K}$

FACIL: α_V iso DE E.V. $\forall V \in C$

$\Rightarrow$ ES NATURAL EN V :

"ISOMORFISMO" en CLOS $X = Y$ si y solo si $X \simeq Y$

• EN UNA CAT, $X = Y \Leftrightarrow X \simeq Y$.

• EN FUNCIONES $\rightarrow$ ISO NAT.

• EN CAT? $C = D$ si y solo si $\exists$

DEF: Dos cat $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ son equiv. si $\exists$ funtores

$$F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D} \wedge G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C} \text{ que son NAT}$$

$$F \circ G \simeq 1_{\mathcal{D}}, \quad G \circ F \simeq 1_{\mathcal{C}}.$$

UNA EQUIVALENCIA ES UNA ESECCION

$$\eta: 1_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F \wedge \epsilon: F \circ G \rightarrow 1_{\mathcal{D}}.$$

DEF: un functor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ES EFECTUAL

surj en objetos si $\forall y \in \mathcal{D} \exists x \in \mathcal{C}: Fx \simeq y$.

PROP $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ EQUIV $\Leftrightarrow$ PUENO, FEL Y E. SURJ en objetos.

DEM Ejerc.

DEF: UNA EQUIV. $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$ SE DICE UNA ~~TRANSFORMACION~~,
~~TRANSFORMACION~~

Composicion: unos $\begin{pmatrix} \downarrow \alpha \\ \downarrow \beta \end{pmatrix}$

TAMBIEN PUEDEN SER

$$\begin{array}{c} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}' \\ \downarrow \alpha \\ \mathcal{C} \xrightarrow{F'} \mathcal{C}'' \end{array} \quad \begin{array}{c} \mathcal{C}' \xrightarrow{G'} \mathcal{C}'' \\ \downarrow \alpha' \\ \mathcal{C}' \xrightarrow{G} \mathcal{C}'' \end{array} = \begin{array}{c} \mathcal{C} \xrightarrow{F'F} \mathcal{C}'' \\ \downarrow \alpha \alpha' \\ \mathcal{C} \xrightarrow{G'G} \mathcal{C}'' \end{array}$$

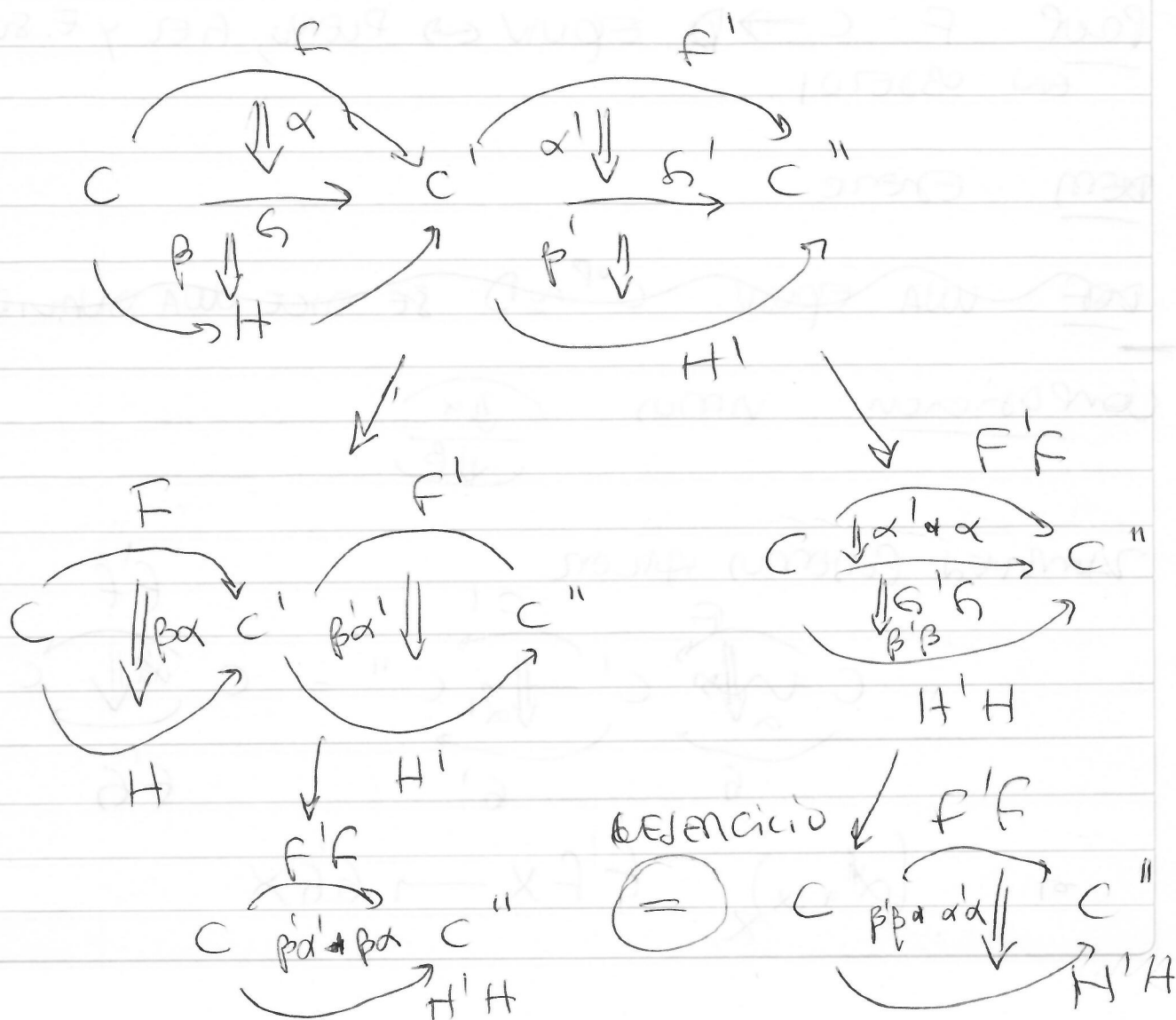
$$\Rightarrow (\alpha' \alpha)_X \cdot F'FX \rightarrow G'GX$$

USAMO) $f = \alpha_x : Fx \rightarrow Gx$

$$\begin{array}{ccc}
 F'Fx & \xrightarrow{F'(\alpha_x)} & F'Gx \\
 \alpha'_{Fx} \downarrow & \ddots & \downarrow \alpha'_{Gx} \\
 G'Fx & \xrightarrow{G'(\alpha_x)} & G'Gx
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \rightarrow (\alpha' \circ \alpha)_x &= \alpha'_{Gx} \circ F'(\alpha_x) \\
 &= G'(\alpha_x) \circ \alpha'_{Fx}
 \end{aligned}$$

USAMO) A:



DEF: UNA 2-CATEGORÍA (ESQUIVA) K ES

• UNA COLECCIÓN DE OBJETOS $Obj(K)$

• 1/ PARA $X, Y \in Obj(K)$, UNA CATEGORÍA $K(X, Y)$
(LLAMAMOS 1-FLECHA A LOS OBJETOS DE $K(X, Y)$)

↳ $f: X \rightarrow Y$
y 2-FLECHA A LOS MORFISMOS
↳ $\alpha: f \Rightarrow g$

• TAMBIÉN PUEDE PASEAR COMPOSICIÓN

• 1-FLECHA

$$K(X, Z) \times K(X, Y) \rightarrow K(X, Z)$$

$$g, f \rightarrow gf$$

• 2 FLECHA

$$\beta: g \rightarrow g' \quad \alpha: f \rightarrow f' \quad \text{HAY} \quad \beta \alpha: gf \rightarrow g'f'$$

$$\rightarrow \beta \alpha: gf \rightarrow g'f' \quad (\text{comp. horizontal})$$

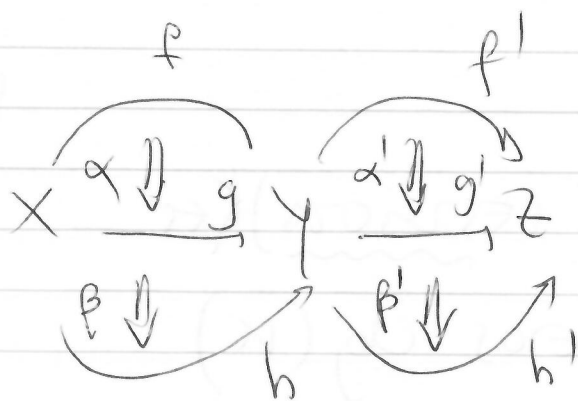
TAMBIÉN PUEDEMOS COMPARAR EN $Hom_{K(X, Y)}(f, g)$:

$$Hom_{K(X, Y)}(g, h) \times Hom_{K(X, Y)}(f, g) \rightarrow Hom_{K(X, Y)}(f, h)$$

$$\beta, \alpha \rightarrow \beta \alpha$$

(comp. vertical)

DE MANERA TA PUEDE VALER LA LEY DE INTERCAMBIO



$$(\beta' \circ \alpha') \circ (\beta \circ \alpha) = (\beta' \circ \beta) \circ (\alpha' \circ \alpha)$$

EXISTEN UNIDADES $1_X: X \rightarrow X$ e $1_f: f \Rightarrow f$.

Y LAS COMP. SON ASOCIATIVAS

$$h(gf) = (hg)f \quad (\text{NO ENRIÇA = SEVO ISO})$$

$$\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha$$

$$(\gamma \circ \beta) \circ \alpha = \gamma \circ (\beta \circ \alpha)$$

Ex 1: CAT CATEGORIA DE CATEGORIAS, COM

$$\text{CAT}(A, B) = \text{Fun}(A, B)$$

Ex 2: $B = \text{Bim}$

Obj $B = k\text{-A'CBIM}$.

$$B(S, T) = (S-T)\text{-BIMODULO} \quad {}_S M_T$$

$$B(S, T) \times B(R, S) \rightarrow B(R, T)$$

$$N \quad M \quad \longrightarrow \quad M \otimes_S N$$

la composicion horizontal es

$$\alpha * \beta = \beta \circ \alpha \quad \alpha \circ \beta : M \in N \rightarrow M \in N'$$

$\alpha : M \rightarrow M', \beta : N \rightarrow N'$

y la vertical es la composicion de funciones

$$\alpha \circ \beta : M \rightarrow L \quad \begin{array}{l} \beta : M \rightarrow N \\ \alpha : N \rightarrow L \end{array}$$

Ej: CHEQUEAR COMPATIBILIDAD