Álgebras de Lie con métricas ad-invariantes

Gabriela P. Ovando[1]

[1] Universidad Nacional de Rosario y CONICET

elENA IX, 2019, La Falda, Córdoba

Outline

¿qué es un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente?

Espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, denotado $\mathfrak{n}$, munido de un corchete de Lie (producto) $[\,,\,] : \mathfrak{n} \times \mathfrak{n} \to \mathfrak{n}$ que satisface:

- $[\,,\,]$ es bilineal y antisimétrico,
- $[u, [v, w]] = 0$ para todos $u, v, w \in \mathfrak{n}$.

El centro de $\mathfrak{n}$ es el subespacio

$$\mathfrak{z} = \{x \in \mathfrak{n} \,:\, [x, v] = 0, \text{ para todo } v \in \mathfrak{n}\} :$$

el conmutador $C(\mathfrak{n})$ es el subespacio

$$C(\mathfrak{n}) = span\{[u, v]\} \text{ para cualquier par } u, v \in \mathfrak{n}.$$

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{v}, \qquad \text{suma directa de espacios vectoriales.}$$

Para cada $x \in \mathfrak{n}$ fijo, $\mathrm{ad}(x) : \mathfrak{n} \to \mathfrak{n}$ dada por $\mathrm{ad}(x)(y) := [x, y]$ es una aplicación lineal nilpotente.

Ejemplos:

• matrices con el corchete de Lie: $[A, B] = AB - BA$.

Heisenberg de dimensión $2n$:

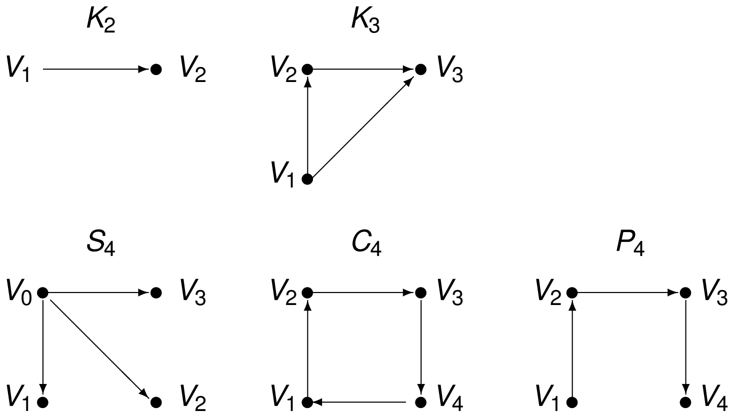
$$\begin{pmatrix} 0 & x_1 & \dots & x_n & z \\ 0 & 0 & \dots & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & y_n \end{pmatrix}$$

Otra:

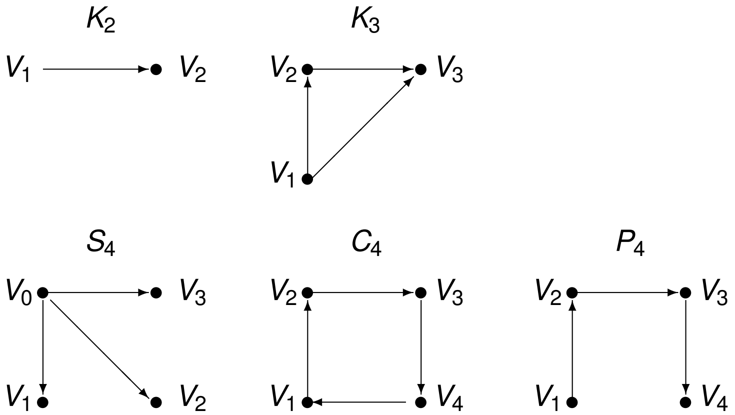
$$\begin{pmatrix} 0 & x_0 & z_1 & \dots & z_{n-1} & z_n \\ 0 & 0 & x_1 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

isomorfismos de álgebras de Lie...

- grafos (dirigidos):
  - vértices,
  - aristas,



- grafos (dirigidos):
  - vértices, $\longleftarrow$ generan $\mathfrak{v}$
  - aristas, $\longleftarrow$ generan $\mathfrak{z}$.



¿qué es una métrica ad-invariante?

Definición

- Una forma bilineal simétrica no degenerada $\langle\, , \,\rangle : \mathfrak{n} \times \mathfrak{n} \to \mathbb{R}$ que satisface.
- $\langle [u, v], w\rangle + \langle [v, [u, w]]\rangle = 0$ para todos $u, v, w \in \mathfrak{n}$.

Dado un subespacio $\mathfrak{v} \subseteq \mathfrak{n}$, tenemos el subespacio ortogonal:

$$\mathfrak{v}^{\perp} = \{u \in \mathfrak{n} \, : \, \langle u, v\rangle = 0, \text{ para todo } v \in \mathfrak{v}\}$$

Y vale

$$\dim \mathfrak{n} = \dim \mathfrak{v} + \dim \mathfrak{v}^{\perp},$$

y puede ocurrir:

- $\mathfrak{v} \cap \mathfrak{v}^{\perp} = \{0\}$,
- $\mathfrak{v} \subseteq \mathfrak{v}^{\perp}$,

¿qué es una métrica ad-invariante?

Definición

- Una forma bilineal simétrica no degenerada $\langle\,,\,\rangle : \mathfrak{n} \times \mathfrak{n} \to \mathbb{R}$ que satisface.
- $\langle [u, v], w\rangle + \langle [v, [u, w]]\rangle = 0$ para todos $u, v, w \in \mathfrak{n}$.

Dado un subespacio $\mathfrak{v} \subseteq \mathfrak{n}$, tenemos el subespacio ortogonal:

$$\mathfrak{v}^\perp = \{u \in \mathfrak{n} \,:\, \langle u, v\rangle = 0, \text{ para todo } v \in \mathfrak{v}\}$$

Y vale

$$\dim \mathfrak{n} = \dim \mathfrak{v} + \dim \mathfrak{v}^\perp,$$

y puede ocurrir:

- $\mathfrak{v} \cap \mathfrak{v}^\perp = \{0\}, \;\longleftarrow\; \mathfrak{v}$ no degenerado
- $\mathfrak{v} \subseteq \mathfrak{v}^\perp, \;\longleftarrow\; \mathfrak{v}$ isotrópico.

¿Cuál de las siguientes álgebras admite una métrica ad-invariante?

- El álgebra de Heisenberg $\mathfrak{h}_{2n+1} = span\{X_1, \dots X_n, Y_1, \dots, Y_n, Z\}$
$$[X_i, Y_i] = Z.$$
- $\mathfrak{n} = span\{X, Y, Z, W\}$ con $[X, Y] = Z$.
- $\mathfrak{n} = span\{X_1, X_2, X_3, Z_1, Z_2, Z_3\}$ con $[X_1, X_2] = Z_3,\ [X_1, X_3] = Z_2,\ [X_2, X_3] = Z_1$.

¿Cuál de las siguientes álgebras admite una métrica ad-invariante?

- El álgebra de Heisenberg $\mathfrak{h}_{2n+1} = span\{X_1, \dots X_n, Y_1, \dots, Y_n, Z\}$
$$[X_i, Y_i] = Z.$$
- $\mathfrak{n} = span\{X, Y, Z, W\}$ con $[X, Y] = Z$.
- $\mathfrak{n} = span\{X_1, X_2, X_3, Z_1, Z_2, Z_3\}$ con $[X_1, X_2] = Z_3,\ [X_1, X_3] = Z_2,\ [X_2, X_3] = Z_1$.

Si una dada $\mathfrak{n}$ admite una tal métrica, entonces ¿cuántas?

Supongamos que $\mathfrak{n}$ admite una $\langle\,,\,\rangle$ ad-invariante, entonces

- $\mathfrak{z}^{\perp} = C(\mathfrak{n})$ (y $C(\mathfrak{n})^{\perp} = \mathfrak{z}$),
- $\mathfrak{z} = C(\mathfrak{n}) \oplus \bar{\mathfrak{z}}$ y
  $\langle\,,\,\rangle$ es no degenerada en $\bar{\mathfrak{z}}$

Supongamos que $\mathfrak{n}$ admite una $\langle\, , \rangle$ ad-invariante, entonces

- $\mathfrak{z}^{\perp} = C(\mathfrak{n}) \quad$ (y $C(\mathfrak{n})^{\perp} = \mathfrak{z}$),
- $\mathfrak{z} = C(\mathfrak{n}) \oplus \bar{\mathfrak{z}}$ y

  $\langle\, , \rangle$ es no degenerada en $\bar{\mathfrak{z}}$

$$\Longrightarrow \qquad \mathfrak{n} = \bar{\mathfrak{z}} \times \bar{\mathfrak{n}}$$

donde en $\bar{\mathfrak{n}}$ vale $\mathfrak{z} = C(\bar{\mathfrak{n}})$, es decir

corango de $\bar{\mathfrak{n}} = 0$.

Además $\dim \bar{\mathfrak{n}} = 2 \dim C(\bar{\mathfrak{n}})$.

$\Longrightarrow$ *tenemos un criterio para saber si* $\mathfrak{n}$ *NO admite una tal métrica*

Data NO

- Dada $\mathfrak{n}$ 2-pasos.
- Calculamos *corank* $\mathfrak{n} = \dim \mathfrak{z} - \dim C(\mathfrak{n})$
- Si $\dim \mathfrak{n} - \mathit{corank}\,\mathfrak{n} \neq 2 \dim C(\mathfrak{n})$, entonces
- $\mathfrak{n}$ no admite métrica ad-invariante.

Data NO

- Dada $\mathfrak{n}$ 2-pasos.
- Calculamos *corank* $\mathfrak{n} = \dim \mathfrak{z} - \dim C(\mathfrak{n})$
- Si $\dim \mathfrak{n} - \mathit{corank}\,\mathfrak{n} \neq 2 \dim C(\mathfrak{n})$, entonces
- $\mathfrak{n}$ no admite métrica ad-invariante.

Ejemplo SI (muchos)

Elijamos $\mathfrak{n}$ 2-pasos nilpotente cualquiera. Y tomemos su "cotangente": $T^*\mathfrak{n} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}^*$ como espacio vectorial, y hacemos actuar $\mathfrak{n}$ en $\mathfrak{n}^*$ por la acción coadjunta. El corchete de Lie:

$$[x, y] = [x, y]_{\mathfrak{n}} \, \forall x, y \in \mathfrak{n}, \quad [x, \varphi] := x \cdot \varphi \, \forall x \in \mathfrak{n}, \varphi \in \mathfrak{n}^*.$$

La métrica *hiperbólica*:

$$\langle (x_1, f_1), (x_2, f_2) \rangle = f_1(x_2) + f_2(x_1)$$

resulta ad-invariante.

Formas trilineales y alternantes

- $\mathfrak{n}$ con métrica ad-invariante $\langle\ ,\ \rangle \quad \Longrightarrow$.
- $\mu(x,y,z) = \langle [x,y], z\rangle$ es trilineal y
- ALTERNANTE.

Teorema [Noui - Revoy, 97]

Existe una biyección natural entre clases de isomorfismo de álgebras de Lie 2-pasos nilpotentes con métricas ad-invariantes de corango nulo de dimensión $2n$ y clases de equivalencia de formas trilineales alternantes de rango n.

Prueba: $\mathfrak{n} = V \oplus V^*$ con métrica ad-invariante $\langle\ ,\ \rangle$, con V es un espacio vectorial, y donde

$$[(v_1, f_1), (v_2, f_2)] = (0, h(v_1 \wedge v_2)),$$

$\mathrm{ad}_{(x,f)}$ antisimétrica $\Longleftrightarrow (x,y,z) \xrightarrow{w} h(x,y)(z)$ es t.a. y núcleo V^*.

Como vimos, si tomamos cualquier $\mathfrak{n}$ 2-pasos nilpotente, $T^*\mathfrak{n} = \mathfrak{n}^* \oplus \mathfrak{n}$ admite métrica ad-invariante y es 2-pasos nilpotente.
$T^*\mathfrak{n}$ tiene corango nulo si y sólo si $\mathfrak{n}$ lo tiene pues $\mathfrak{z}(\mathfrak{n}) = C(\mathfrak{n})$ y

- $\mathfrak{z}(T^*\mathfrak{n}) = C(\mathfrak{n})^0 \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{n})$ y
- $C(T^*\mathfrak{n}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{n})^0 \oplus C(\mathfrak{n})$.

Una forma trilineal alternante $w \in \Lambda^3 V^*$ se dice *escindible* si existe una descomposición $V_1 \oplus V_2 = V$ tal que $w \in V_1^* \otimes \Lambda^2 V_2^*$.

Proposición [N-R]

Para que un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente de corango nulo, sea un álgebra cotangente, es necesario y suficiente que la forma w asociada sea escindible.

Otra aproximación con matrices antisimétricas

Supongamos que $\mathfrak{n}$ tiene corango nulo, i.e. $\mathfrak{z} = C(\mathfrak{n})$, entonces

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{v}$$

y podemos elegir $\mathfrak{v}$ totalmente isotrópico: $\mathfrak{v}^\perp = \mathfrak{v}$. Elijamos una base $z_1, \ldots, z_n, v_1, \ldots, v_n$ de $\mathfrak{n}$ tal que $\langle z_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$. Observemos que $[v_i, v_j] \in \mathfrak{z} = \mathfrak{z}^\perp$. Luego

$$\langle [v_i, v_j], v_k \rangle = \langle \sum \alpha_{ij} z_s, v_k \rangle$$

Elijamos cualquier producto interno en $\mathfrak{v}$: $\langle\,\rangle_{\mathfrak{v}}$ y para cada $v \in \mathfrak{v}$ definamos $\rho(v) \in \mathrm{so}(\mathfrak{v}, \langle\,,\,\rangle_{\mathfrak{v}})$ por

$$\langle \rho(v) u, w \rangle_{\mathfrak{v}} := \langle [u, w], v \rangle \qquad (1)$$

Claramente $\rho(v)$ es antisimétrica y satisface $\forall i, j, k$:

$$\langle \rho(v_i) v_j, v_k \rangle_{\mathfrak{v}} = -\langle \rho(v_j) v_i, v_k \rangle_{\mathfrak{v}} \Longleftrightarrow \rho(v) v = 0$$

Recíprocamente. Dada la data

- $(\mathfrak{v}, \langle\, , \,\rangle)$ un espacio vectorial munido de un producto interno y
- $\rho : \mathfrak{v} \to \mathfrak{so}(\mathfrak{v})$ una aplicación lineal tal que

$$\rho(v)v = 0 \qquad \text{para todo } v \in \mathfrak{v}.$$

Construimos $\mathfrak{n}$ 2-pasos nilpotente con métrica ad-invariante: Sea

- $\mathfrak{n} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{v}^*$, suma directa de espacios vectoriales,
- con la métrica hiperbólica y
- $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{n} \times \mathfrak{n} \to \mathfrak{n}$ dado por

$$[f, x + g] = 0 \forall f, g \in \mathfrak{v}^*, x \in \mathfrak{v},$$

$$[x, y] \in \mathfrak{v}^* \quad \langle [x, y], v\rangle = \langle \rho(v)x, y\rangle_{\mathfrak{v}}$$

$\cup_{v,w\in\mathfrak{b}}\{\rho(v)w\} = \mathfrak{v}$ para que el corango sea nulo.

Teorema [O., 2007]

$\mathfrak{n}$ con este corchete y la métrica hiperbólica es 2-pasos nilpotente con métrica ad-invariante y de corango nulo.
Toda $\mathfrak{n}$ de corango nulo con métrica ad-invariante es de esta forma

Supongamos $\{v_i\}$ bon en $\mathfrak{n}$,
sea $A^i = \rho(v_i)$, entonces $A^i(v_j) = \sum_k a^i_{kj} v_k$,
de modo que los coeficientes a^i_{jk} satisfacen

$$a^i_{jk} = -a^j_{ik} \qquad a^i_{jk} = -a^i_{kj}$$

lo que es equivalente a la trilinealidad de antes...
Corango nulo $\Longleftrightarrow$ ρ es inyectiva.

En dimensión tres, vemos que las matrices posibles son:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \end{pmatrix} \; A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \; A^3 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En cuatro:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & -a & 0 & c \\ 0 & -b & -c & 0 \end{pmatrix} \; A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & d \\ b & 0 & -d & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & -c \\ -a & 0 & 0 & -d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \end{pmatrix} \; A^4 = \begin{pmatrix} 0 & b & c & 0 \\ -b & 0 & d & 0 \\ -c & -d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $\{A^i\}_{i=1}^4$ no es li, en dimension ocho NO hay $\mathfrak{n}$ 2-pasos con métrica ad-invariante y corango nulo. Para $n > 4$, SI hay.

¿Qué es un álgebra de Lie?

Espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, denotado $\mathfrak{n}$, munido de un corchete de Lie (producto) $[\,,\,] : \mathfrak{n} \times \mathfrak{n} \to \mathfrak{n}$ que satisface:

- $[\,,\,]$ es bilineal y antisimétrico,
- Identidad de Jacobi: $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$ para todos $u, v, w \in \mathfrak{n}$.

Ejemplos

• espacio de matrices $\mathrm{gl}(n\mathbb{R})$ con $[A, B] = AB - BA$.

• subálgebra de Lie: subev. de un álgebra de Lie *cerrado* para $[\cdot, , \cdot]$:

- $\mathrm{sl}(n, \mathbb{R})$ matrices de traza cero,
- $\mathrm{so}(n, \mathbb{R})$ matrices antisimétricas,
- matrices triangulares.

$\mathfrak{g}$ álgebra de Lie, $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ es *ideal* si

• $\mathfrak{h}$ subev y • $[x, y] \in \mathfrak{h}$, $\forall x \in \mathfrak{h}, y \in \mathfrak{g}$.

Dada $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie, consideramos las series centrales ascendente y descendente que consiste de ideales $C^s(\mathfrak{g})$, $C_r(\mathfrak{g})$, $r \geq 0$, definidos inductivamente por

$$\begin{array}{rcl} C^0(\mathfrak{g}) & = & \mathfrak{g} \\ C^r(\mathfrak{g}) & = & [\mathfrak{g}, C^r(\mathfrak{g})] \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} C_0(\mathfrak{g}) & = & 0 \\ C_r(\mathfrak{g}) & = & \{x \in \mathfrak{g} : [x, \mathfrak{g}] \in C_{r-1}(\mathfrak{g})\} \end{array}$$

Se tiene $C_j(\mathfrak{g}) \subseteq C_{j+1}(\mathfrak{g})$ $\forall j$ y $C^{j+1}(\mathfrak{g}) \subseteq C^j(\mathfrak{g})$.
$\mathfrak{g}$ se dice

- *nilpotente* si existe $r > 0$ tal que $C^r(\mathfrak{g}) = 0$ o $C_r(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$.
- *semisimple* si $B(x, y) := tr\, \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y$ es no-degenerada en $\mathfrak{g}$, B se dice la forma de Killing.

$\mathfrak{n}$ es k-pasos nilpotente si k es el menor k tal que $C_k(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$.

Ejemplo:

1. $\mathfrak{n}$ 2-pasos nilpotente.
2. $\mathfrak{so}$ es semisimple.

Como antes, métrica ad-invariante en $\mathfrak{g}$:

$$\langle [x,y],u\rangle + \langle [x,u],y\rangle = 0 \qquad \forall x,y,u\in\mathfrak{g}.$$

Llamadas: "métrica","ortogonal", "cuadrática" , "regular cuadrática".
Ejemplos

- la forma de Killing es siempre ad-invariante, pero es no-degenerada para $\mathfrak{g}$ semisimple!.
- $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie, su cotangente $T^*\mathfrak{g} = \mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*$.

Lema

$(\mathfrak{g}, \langle\ ,\ \rangle)$ álgebra de Lie con métrica ad-invariante.

(i) Si $\mathfrak{h}$ es un ideal entonces $\mathfrak{h}^\perp$ también es un ideal en $\mathfrak{g}$.

(ii) $C^r(\mathfrak{g})^\perp = C_r(\mathfrak{g})$ para todo r.

O sea vale la igualdad

$$\dim \mathfrak{g} = \dim C^r(\mathfrak{g}) + \dim C_r(\mathfrak{g}). \tag{2}$$

Si $C^1(\mathfrak{g})$ es el conmutator y $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ denota el centro de $\mathfrak{g}$, para $r = 1$ arriba

$$\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) + \dim C^1(\mathfrak{g}), \tag{3}$$

Otra vez tenemos un criterio para ver si $\mathfrak{g}$ NO admite una métrica ad-invariante

Calculamos las dimensiones $\dim C^r(\mathfrak{g})$ y $\dim C_r(\mathfrak{g})$ y verificamos Ecuación (2).

En particular, para álgebras de Lie solubles el centro es no trivial.

- $\mathfrak{g}$ *soluble* si la serie derivada llega a 0:

$$D^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}, \qquad D^i(\mathfrak{g}) = [D^{i-1}(\mathfrak{g}), D^{i-1}(\mathfrak{g})].$$

Haremos hincapié en el caso no semisimple...

Ejemplo

Con las propiedades anteriores obtenemos las álgebras de Lie con métricas ad-invariantes en dimensiones bajas:

(i) En dimensión = 1, 2 sólo el álgebra de Lie abeliana. La soluble no abeliana de dimensión dos, tiene centro trivial.

(ii) en dimensión = 3, las álgebras de Lie simples $\mathfrak{sl}(\mathbb{R})$ and $\mathfrak{so}(3)$ y el álgebra de Lie abeliana.

(iii) en dimensión = 4, las extensiones triviales: $\mathbb{R} \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, $\mathbb{R} \times \mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$, $\mathbb{R}^4$; y dos álgebras de Lie solubles que son extensiones del álgebra de Heisenberg.
Si tomamos el álgebra de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}_3$ generada por $\mathfrak{h}_3 = span\{e_1, e_2, e_3\}$ con $[e_1, e_2] = e_3$ entonces en la base $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$
- $\mathfrak{osc}$: $[e_0, e_1] = e_2$, $[e_0, e_2] = -e_1$, $[e_1, e_2] = e_3$,
- $\mathfrak{b}$: y $[e_0, e_1] = e_1$, $[e_0, e_2] = -e_2$, $[e_1, e_2] = e_3$.

Construcciones

Lo siguiente generaliza el cotangente definido antes.

T^* - extensiones

Sea $\mathfrak{h}$ un álgebra de Lie y sea $\theta : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}^*$ denota un 2-cociclo de $(\mathfrak{h}, \mathrm{ad}^*)$. Sea $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*$ con la métrica neutral y equipado con el corchete de Lie dado por

$$[(x_1, \varphi_1), (x_2, \varphi_2)] = ([x_1, x_2]_{\mathfrak{h}}, x_1 \cdot \varphi_2 - x_2 \cdot \varphi_1 + \theta(x_1, x_2)), \quad (4)$$

para todo $x_1, x_2 \in \mathfrak{h}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{h}^*$. Esta álgebra de Lie denotada como $T^*_\theta \mathfrak{h}$ será llamada la T^*-extensión of $\mathfrak{h}$ by θ. La métrica neutral en $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*$ es ad-invariant, si θ satisface

$$\theta(x_1, x_2)(x_3) = -\theta(x_1, x_3)(x_2) \qquad \text{para todos } x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{h}.$$

Esta noción fue dada por Bordemann (1997).

Se puede probar:

(a) si $\mathfrak{h}$ es soluble entonces $T_\theta^*\mathfrak{h}$ es soluble;
(b) si $\mathfrak{h}$ is nilpotente entonces $T_\theta^*\mathfrak{h}$ es nilpotente;
(c) álgebras de Lie no isomorfas pueden tener extensiones T^* isométricas.

Ejemplo.
Sea $\mathbb{R}^3$ como álgebra de Lie abeliana. Consideramos la base canónica e_1, e_2, e_3 con base dual e_4, e_5, e_6 y el 2-cociclo $\theta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{3^*}$ dado por

$$\theta(e_1, e_2) = e_6 \quad \theta(e_1, e_3) = -e_5 \quad \theta(e_2, e_3) = e_4.$$

Por otro lado la misma álgebra de Lie puede ser obtenida como la cotangente del álgebra de Heisenberg de dimensión tres.

Bordemann probó lo siguiente.

Proposición

Cualquier álgebra de Lie nilpotente de dimensión par con métrica ad-invariante corresponde a una extensión T^*.

Ejemplo:
En dimensión dos, tomamos $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$ y obtenemos el álgebra diamond $\mathfrak{d}$. Pero no es posible obtener el oscilador... $\longleftarrow$ el resultado no vale para solubles.

- Hacemos $\mathfrak{aff}(\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{aff}(\mathbb{R})^*$, el cotangente con la acción coadjunta
- ¿Cuáles son los 2-cociclos correspondientes? ¿existen?

Doble extensión

Recordemos que una derivación en un álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ es una $t : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ tal que

$$t[x, y] = [tx, y] + [x, ty], \text{ para todos } x, y \in \mathfrak{h}.$$

Otra forma de construir álgebras de Lie con métricas ad-invariantes: con la siguiente
DATA

- un álgebra de Lie $(\mathfrak{d}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{d}})$ con métrica ad-invariante $\langle\, ,\, \rangle_{\mathfrak{d}}$,
- un álgebra de Lie $(\mathfrak{h}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{h}})$ con forma bilineal simétrica ad-invariante (posiblemente degenerada) $B_{\mathfrak{h}}$,
- un homomorfismo de álgebras de Lie $\pi : (\mathfrak{h}, [\cdot, \cdot]) \to \mathrm{Dera}(\mathfrak{d}, \langle\, ,\, \rangle_{\mathfrak{d}})$ de $\mathfrak{h}$ en el álgebra de Lie de derivaciones antisimétricas de $\mathfrak{d}$, digamos $\mathrm{Dera}(\mathfrak{d}, \langle\, ,\, \rangle_{\mathfrak{d}}$.

Consideramos el espacio vectorial

$$\mathfrak{g} := \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{d} \oplus \mathfrak{h}^*.$$

Sea Q en $\mathfrak{g}$, definida por

$$Q((h_1, x_1, \alpha_1), (h_2, x_2, \alpha_2)) := B_{\mathfrak{h}}(h_1, h_2) + \langle x_1, x_2 \rangle_{\mathfrak{d}} + \alpha_1(h_2) + \alpha_2(h_1); \tag{5}$$

la cual es no-degenerada y de signatura
$sgn(Q) = sgn(\langle \, , \, \rangle_{\mathfrak{d}}) + (\dim \mathfrak{h}, \dim \mathfrak{h})$.
El corchete de Lie en $\mathfrak{g}$ está dado por

$$\begin{aligned} [(h_1, x_1, \alpha_1), (h_2, x_2, \alpha_2)] \quad := \quad & ([h_1, h_2]_{\mathfrak{h}}, [x_1, x_2]_{\mathfrak{d}} + \pi(h_1)x_2 - \pi(h_2)x_1, \\ & \beta(x_1, x_2) + \mathrm{ad}^*_{\mathfrak{h}}(h_1)\alpha_2 - \mathrm{ad}^*_{\mathfrak{h}}(h_2)\alpha_1) \end{aligned} \tag{6}$$

donde $\beta(x_1, x_2)(h) := \langle \pi(h)x_1, x_2 \rangle_{\mathfrak{d}}$ y $\mathrm{ad}^*_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \to \mathrm{End}(\mathfrak{h}^*)$ es la acción coadjunta.

Se verifica

- la métrica Q es ad-invariante.
- Mientras $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$, en general $\mathfrak{d}$ no es subálgebra.
- El subespacio $\mathcal{G}(\mathfrak{d}) := \mathfrak{d} \oplus \mathfrak{h}^*$ es un ideal en $\mathfrak{g}$.

$\mathfrak{g}$ es llamada *doble extensión* o *bi-extensión* de $\mathfrak{d}$ con respecto a $(\mathfrak{h}, \pi)$.

Ejemplo.

En el proceso de doble extensión empezando con $\mathfrak{d} = 0$ obtenemos el álgebra cotangente $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*$.

Ejemplo de doble extensión.

Tomamos $\mathfrak{d} = \mathbb{R}^2$. Podemos equipar $\mathbb{R}^2$ con

- el producto interno usual $\langle\,,\,\rangle$ y $J \in End(\mathbb{R}^2)$ antisimétrica, con $\beta(x, y) = \langle Jx, y\rangle$.
  Obtenemos $\mathfrak{osc}$. Es soluble y Q es Lorentziana.
- la métrica neutral, obtenemos el álgebra de Lie con métrica neutral $\mathfrak{b}$.

Tenemos el importante resultado de Medina y Revoy, 1985.

Teorema

Un álgebra de Lie no simple indescomponible (A, Q) equipada con una métrica ad-invariante which es una doble extensión de alguna álgebra de Lie $(\mathfrak{d}, \langle\,,\,\rangle_{\mathfrak{d}})$ por un álgebra de Lie de dimensión uno o una simple.

Teorema [Favre-Santharoubane '87]

Cualquier álgebra de Lie con métrica ad-invariante y centro no trivial es una suma directa ortogonal de un álgebra de Lie de dimensión uno y una de dimensión $n-1$ con métricas ad-invariantes o es una doble extensión de un álgebra de Lie dimensión $n-2$ con métrica ad-invariante.

El proceso de doble extensión está dicho en el libro de Kac, 1984.

Aparentemente en la disertación de V. Keith (1984) se obtuvo un procedimiento similar para construir álgebras de Lie cuadráticas. Anunciado por Hofman y Keith, llamado bi-extensión.
Favre y Santharoubane investigaron las clases de isomorfismo de las dobles extensiones.
Problema: empezamos con álgebras de Lie no isomorfas y obtenemos isomorfas...

Otro método: *twofold extension*.
Berard Bergery usó esta idea para estudiar espacios simétricos. Kath y Olbrich [2006] aplicaron esto para producir álgebras de Lie con métricas ad-invariantes.
Probaron que las álgebras de Lie solubles con estas métricas, son extensiones twofold (=dobles) asociadas a representaciones ortogonales de álgebras de Lie abelianas y describieron las clases de equivalencia de estas extensiones.
Sea $(\rho, \mathfrak{a})$ una representación ortogonal de un álgebra de Lie abeliana $\mathfrak{l}$ en un espacio vectorial con pseudo-métrica $(\mathfrak{a}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{a}})$.
Elijamos una 3-forma $\gamma \in \Lambda^3\mathfrak{l}^*$ y un cociclo $\alpha \in Z^2(\mathfrak{l}, \mathfrak{a})$.
Se construye una estructura de álgebra de Lie en $\mathfrak{l}^* \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{l}$ $(\mathfrak{d}_{\alpha,\gamma}(\mathfrak{a}, \mathfrak{l}, \rho))$ de modo que la forma bilineal abajo es ad-invariante

$$\langle Z_1 + A_1 + L_1, Z_2 + A_2 + L_2\rangle = \langle A_1, A_2\rangle_{\mathfrak{a}} + Z_1(L_2) + Z_2(L_1).$$

Favre y Santharoubane probaron lo siguiente.

Proposición

El conjunto de clases de isometría de álgebras de Lie que son doble extensión de abelianas de dimensión n por derivaciones nilpotentes, está en biyección con el conjunto de particiones de n -$(n_1, \ldots, n_t)$- que satisfacen

$$\text{si } i \text{ es par entonces } \#\{j; n_j = i\} \text{ es par.} \tag{7}$$

Ejemplo.
Para $n = 3$ las particiones posibles son: (3) y $(1, 1, 1)$ que corresponde a las álgebras de Lie
• $\mathfrak{n}_{2,3}$ el álgebra de Lie 3-pasos nilpotente libre en dos generadores y
• el álgebra de Lie abeliana trivial.

Proposición. [Baum - Kath, 2003]

Sea $A(p,q)$ la doble extensión de un álgebra de Lie abeliana equipada con métrica de signatura (p, q) por $(\mathbb{R}, A)$, donde $A \in \mathfrak{so}(p,q)$. Entonces $A(p,q)$ es indescomponible si y sólo si $KerA$ es degenerado. Más aun $A(p,q)$ es soluble.

Ejemplos: álgebras de Lie de dimensión 4, solubles.

Proposición. [Baum - Kath, 2003]

Sea $A(p,q)$ la doble extensión de un álgebra de Lie abeliana equipada con métrica de signatura (p, q) por $(\mathbb{R}, A)$, donde $A \in \mathfrak{so}(p,q)$. Entonces $A(p,q)$ es indescomponible si y sólo si $KerA$ es degenerado. Más aun $A(p,q)$ es soluble.

Ejemplos: álgebras de Lie de dimensión 4, solubles.

Proposición. [Medina, 1985]

Cada álgebra de Lie indescomponible equipada con una métrica Lorentziana ad-invariante es isomorfa a $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ o a un álgebra osciladora.

Baum y Kath estudiaron las dobles extensiones para obtener las álgebras de Lie con índice $(2, n-2)$.

Se usan las matrices siguientes:

$$L_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,\lambda} := \begin{pmatrix} L_2 & 0 \\ 0 & A_\lambda \end{pmatrix} \qquad L_{3,\lambda} := \begin{pmatrix} L_3 & 0 \\ 0 & A_\lambda \end{pmatrix}$$

donde $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r)$con $0 < \lambda_1 < \ldots \lambda_r$ and A_λ como en Teorema de Medina'85.

Baum y Kath obtuvieron las álgebras de Lie con métrica ad-invariante de dimensión ≤ 6, usando doble extensión.

(i) En dimensión = 5: $\mathfrak{n}_{2,3}$ el álgebra de Lie 3-pasos nilpotente libre en 2 generadores.

(ii) En dimensión = 6:
- $\mathfrak{n}_{3,2}$ el álgebra de Lie 2-pasos nilpotente libre en 3 generadores;
- $\mathfrak{osc}(\lambda) = span\{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ donde los corchetes no triviales son

$$[e_0, e_1] = e_2,\ [e_0, e_2] = -e_1,\ [e_0, e_4] = \lambda e_5,$$

$$[e_0, e_5] = -\lambda e_4,\ [e_1, e_2] = [e_3, e_4] = e_5$$
- $L_{2,\lambda}(1, 3)$ soluble de signatura (2,4)
- $N_k(2, 2)$ is a double extension of $\mathbb{R}^4$ with neutral metric via one of the matrices N_i, $i = 2, \ldots, 6$ en [Baum -Kath].

En el caso no soluble Benayadi y Elduque usaron representaciones de dimensión finita de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

Resultados en familias varias.

- [del Barco - O.]
  nilpotentes libres
- [del Barco, 2016]
  nilradicales de una subálgebra parabólica asociada a una forma real split real de un álgebra de Lie simple.
- [del Barco, 2016]
  álgebras de Lie 2-pasos nilpotentes, asociadas a grafos.

Aplicaciones ?

• Quadratic 2-step Lie algebras: Computational algorithms and classification, Pilar Benito, Daniel de-la-Concepción, Jorge Roldán-López, Iciar Sesma, Arxiv 2018.

Introducen un método computacional para construir cualquier álgebra de Lie 2-pasos nilpotente con métrica ad-invariante en d generadores.

Usan las matrices antisimétricas de antes.

• Espacios naturalmente reductivos ($\supseteq$ simétricos)

Bibliografía
Todo en el trabajo:

1. G. P. OVANDO, *Lie algebras with ad-invariant metrics. A survey - guide*. Rendiconti Seminario Matematico Univ. Pol. Torino. Workshop for Sergio Console, **74** (1) (2016), 241 – 266